无穷小与无穷大、无穷小的比较

高等数学 I-信息、统计外招

Weiwen Wang(王伟文)

暨南大学

2025 年秋季学期

课程网页

无穷小与无穷大

定义 (无穷小)

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 的**无穷小**

无穷小与无穷大

定义 (无穷小)

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 的**无穷小**

- $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 为 $x \to 1$ 时的无穷小
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$，所以函数 $\frac{1}{x}$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷小

无穷小与无穷大

定义 (无穷小)

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 的**无穷小**

- $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 为 $x \to 1$ 时的无穷小
- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$，所以函数 $\frac{1}{x}$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷小
- 无穷小量并不是一个很小的数，它是指当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)，这个函数 $f(x)$ 的绝对值能小于任意给定的正数 ϵ.
- 零是无穷小中唯一的常数.

定理 2 (无穷小与函数极限的关系)

在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为无穷小.

定理 2 (无穷小与函数极限的关系)

在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为无穷小.

- **设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，记 $\alpha = f(x) - A$，用 $\epsilon - \delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$;**

定理 2 (无穷小与函数极限的关系)

在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$, 其中 α 为无穷小.

- 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 记 $\alpha=f(x)-A$, 用 $\epsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$;
- 设 $f(x)=A+\alpha$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$, 用 $\epsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

定义 (无穷大)

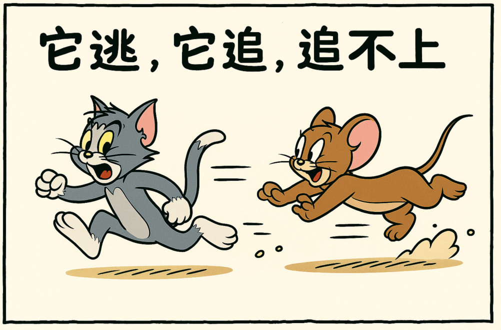
设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M, 总存在正数 δ(或正数 X), 只有 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷大.

- 简而言之，当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 可以大于任意给定的正数;

- 简而言之，当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 可以大于任意给定的正数；



GPT-5 生成

- 按照函数极限的定义，当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大的函数 $f(x)$ 的极限是存在的，但为了叙述的方便性，我们也说 "函数的极限是无穷大"，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty).$$

- 按照函数极限的定义，当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大的函数 $f(x)$ 的极限是存在的，但为了叙述的方便性，我们也说 “函数的极限是无穷大”，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty).$$

- “$|f(x)| > M$” 换成 “$f(x) > M$”(或 “$f(x) < -M$”)，就记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty \quad (\text{或} \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty)$$

例 2

证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

证明.

只需证明 $\forall M>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时, $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$.

证明.

只需证明 $\forall M>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时, $\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$.

因为

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M \iff |x-1|<M \ (x\neq 1)$$

证明.

只需证明 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $\left|\frac{1}{x-1}\right| > M$.

因为

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| > M \Longleftrightarrow |x-1| < M \ (x \neq 1)$$

故取 $\delta = M$, 则 $\forall M > 0$, 取 $\delta = M$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $\left|\frac{1}{x-1}\right| > M$. □

例 2

证明 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

- 直线 $x=1$ 是函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线;

例 2

证明 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

- 直线 $x=1$ 是函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线;
- 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则称直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

例 2

证明 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

- 直线 $x=1$ 是函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线;
- 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 则称直线 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的铅直渐近线.
- **Q: Recall 水平渐近线.**

定理

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

定理

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

- $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

随堂练习

请判断函数 $f(x)$ 在指定自变量变化过程中是无穷大还是无穷小,抑或两者都不是.

(1) $f(x) = x \quad (x \to 0)$

(2) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \to 0)$

(3) $f(x) = e^x \quad (x \to 0)$

(4) $f(x) = e^x - 1 \quad (x \to 0)$

(5) $f(x) = \ln x \quad (x \to 0^+)$

(6) $f(x) = e^x \quad (x \to +\infty)$

(6) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \to \infty)$

(8) $f(x) = \sqrt{x} + 0.001 \quad (x \to 0^+)$

随堂练习

(1) $f(x)=x \quad (x\to 0)$

无穷小

(2) $f(x)=\frac{1}{x} \quad (x\to 0)$

无穷大

(3) $f(x)=e^x \quad (x\to 0)$

两者都不是

(4) $f(x)=e^x-1 \quad (x\to 0)$

无穷小

(5) $f(x)=\ln x \quad (x\to 0^+)$

无穷大

(6) $f(x)=e^x \quad (x\to +\infty)$

无穷大

(6) $f(x)=\frac{1}{x} \quad (x\to \infty)$

无穷小

(8) $f(x)=\sqrt{x}+0.001 \quad (x\to 0^+)$

两者都不是

无穷小的阶的比较

当 $x \to 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

无穷小的阶的比较

当 $x \to 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$

无穷小的阶的比较

当 $x \to 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

无穷小的阶的比较

当 $x \to 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

无穷小的阶的比较

当 $x \to 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$ x^2 趋于零的速度比 $3x$"快".
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

无穷小的阶的比较

当 $x\to 0$ 时, $x^2,3x,x$ 都是无穷小,

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3}=0$ $\quad$ **x^2 趋于零的速度比 $3x$"快".**
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ $\quad$ **x 趋于零的速度比 x^2"慢".**
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

无穷小的阶的比较

当 $x \to 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$ x^2 趋于零的速度比 $3x$"快".
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ x 趋于零的速度比 x^2"慢".
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ x 趋于零的速度和 $3x$"差不多".

无穷小的阶的比较

当 $x \to 0$ 时, $x^2, 3x, x$ 都是无穷小,

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3} = 0$ x^2 趋于零的速度比 $3x$"快".
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$ x 趋于零的速度比 x^2"慢".
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ x 趋于零的速度和 $3x$"差不多".

在自变量同一变化过程中, 无穷小趋于 0 的 "快慢" 差异导致不同的结果.

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见 “lim” 省略自变量的变化过程.

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见 "lim" 省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见 “lim” 省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α低阶的无穷小;

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见 “lim” 省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 是比 α高阶的无穷小, 记作 $\beta=o(\alpha)$;
- 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$, 则称 β 是比 α低阶的无穷小;
- 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小;

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见 “lim” 省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c(c \neq 0)$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c(c \neq 0), k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;

假设 α 和 β 为在同一个自变量变化过程中的无穷小. 为方便起见 “lim” 省略自变量的变化过程.

定义 (无穷小的比较)

- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α低阶的无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c(c \neq 0)$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c(c \neq 0), k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小;
- 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价无穷小, 记 $\alpha \sim \beta$.

同阶能比值，

高阶快归零，

低阶撑场面，

一比就分明.

—GPT-5 生成

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3}=0$ x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小，$x^2=o(3x)$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ x 是比 x^2 低阶的无穷小;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$ x 是 $3x$ 的同阶无穷小;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(3x)^2}=\frac{1}{9}$ x^2 是关于 $3x$ 的 2 阶无穷小;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ $\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

随堂练习

下列无穷小在给定的自变量变化过程中与 x 相比是什么阶的无穷小

(1) $x \cdot \cos x \ (x \to 0)$

(2) $1000x \ (x \to 0)$

(3) $\frac{1}{1000} \ (x \to 0)x$

(4) $2x^2 \ (x \to 0)$

(5) $\sqrt{x} \sim (x \to 0^+)$

随堂练习

(1) $x \cdot \cos x \ (x \to 0)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$(等价无穷小)

(2) $1000x \ (x \to 0)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1000x}{x} = 1000$(同阶无穷小)

(3) $\frac{1}{1000}x \ (x \to 0)x$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1000x} = \frac{1}{1000}$(同阶无穷小)

(4) $2x^2 \ (x \to 0)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$(高阶无穷小)

(5) $\sqrt{x} \sim (x \to 0^+)$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$(低阶无穷小)

常见等价无穷小

当 $x \to 0$

- $\sin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0)$

定理

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + \underbrace{o(\alpha)}_{\text{比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小}}$$

定理

β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta = \alpha + \underbrace{o(\alpha)}_{\text{比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小}}$$

- $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$;
- $\ln(1+x) = x + o(x)$;
- $\sin x = x + o(x)$.

定理 (等价无穷小替换)

设 $\alpha \sim \widetilde{\alpha}$, $\beta \sim \widetilde{\beta}$, 且 $\lim \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}.$$

- 涉及的自变量变化过程一致.

例 3

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

例 3

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

证明.

因为当 $x \to 0$ 时，$\tan 2x \sim 2x$，$\sin 5x \sim 5x$，

例 3

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

证明.

因为当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

□

随堂练习

利用等价无穷小替换计算以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{1-\cos x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\tan x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$

随堂练习

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{1-\cos x}=1$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\tan x}=1$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin x}=2$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$

作业

- 教材习题 1-4: 1; 5(完成表格第 2 行 $x \to x_0$ 和第 6 行 $x \to \infty$); 8.
- 教材习题 1-7: 1; 2; 3; 5(1)(2)(3).